**ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)**

MATHEMATIQUES

CONCOURS D'ADMISSION 1991

**DEUXIEME EPREUVE
OPTION T.A.
(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

L'objet du problème est l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres d'un opérateur différentiel considéré d'abord dans un espace de polynômes puis dans certains espaces de fonctions plus générales.

PARTIE I

Soit n un entier donné $n \geqslant 2$; soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .

A tout nombre réel α, on associe l'application T_α définie dans $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$T_\alpha(P)(x) = x(x - 1)\, P''(x) + (1 + \alpha x)\, P'(x) .$$

P' et P" désignent les dérivées première et seconde de P . On se propose d'étudier des propriétés de T_α suivant les valeurs de α .

I.1. Valeurs propres de T_α :

a) Démontrer que T_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Pour n = 3, déterminer la matrice A_α associée à T_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$; en déduire les valeurs propres de T_α .

c) Déterminer la matrice A_α associée à T_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
En déduire les valeurs propres de T_α ; exprimer ces n+1 valeurs propres λ_k, k = 0, 1, ..., n en fonction de α et de l'entier k .

d) Pour le cas où n = 3, déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α admet des valeurs propres doubles.

e) Déterminer une condition nécessaire sur α pour qu'il existe deux valeurs propres $\lambda_{k'}$ et $\lambda_{k''}$ égales (pour k' < k") .

f) Le réel α est supposé égal à $-(2q+1)$ où q est un entier tel que $0 < 2q+1 < 2n-2$.

Déterminer les valeurs des entiers k' et k" (k' < k") pour lesquelles $\lambda_{k'} = \lambda_{k''}$.

Déterminer pour chacune de ces valeurs du nombre α, l'ensemble des valeurs propres distinctes en précisant la multiplicité de chacune d'elles.

I.2. Noyau de T_α :

a) Déterminer la dimension du noyau et celle de l'espace image lorsque α n'est pas un entier de l'intervalle [1-n, 0] . Préciser le noyau.

b) Déterminer le noyau de T_α lorsque α vaut 0, puis −1 .

c) Est-ce que la matrice A_α est diagonalisable lorsque α vaut 0 ou −1 ?

d) On suppose : n > 3 et le réel α est égal à un entier $1 - p$, $3 \leqslant p \leqslant n$.

Déterminer un polynôme Q de degré q ($0 \leqslant q \leqslant n$) solution de l'équation $T_\alpha(Q) = 0$.

En déduire le noyau de T_α et préciser sa dimension.

A SUIVRE

I.3. Recherche de vecteurs propres de T_α :

a) On reprend l'exemple n = 3 ; chercher, dans chacun des deux cas $\alpha = -1$ et $\alpha = -4$, les polynômes vecteurs propres de T_α .
La matrice A_α est-elle diagonalisable pour $\alpha = -4$?

b) Soit λ_p une valeur propre simple différente de zéro $1 \leqslant p \leqslant n$; déterminer les coefficients d'un polynôme P vecteur propre de T_α associé à la valeur propre λ_p .

PARTIE II

Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies dans $]-1, 1[$ qui sont des sommes de séries entières convergentes dans cet intervalle.

Soit U_α l'endomorphisme défini dans $\mathcal{A}$ par la relation :

$$U_\alpha(f)(x) = x(x-1)\,f''(x) + (1+\alpha x)\,f'(x) \ , \qquad \alpha \text{ réel donné différent de } 0 \ .$$

II.1. Soit λ un réel ; démontrer qu'il existe des fonctions S, appartenant à $\mathcal{A}$, telles que :

$$U_\alpha(S) = \lambda S \ .$$

On posera : $S(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$.

Il y aura lieu d'établir les relations vérifiées par les coefficients a_p et de préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions obtenues.
(Discuter suivant les valeurs de λ .)

En particulier, à quelle condition sur α et λ, la fonction S est-elle un polynôme ?

II.2. Comparer les valeurs propres de l'endomorphisme U_α de $\mathcal{A}$ aux valeurs propres de T_α dans $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi que les dimensions des sous-espaces propres associés.

PARTIE III

Soit V_α l'application définie dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles deux fois continûment dérivables définies dans $]0, 1[$ à valeurs dans l'espace vectoriel des fonctions continues définies dans $]0, 1[$, telle que :

$$V_\alpha(f)(x) = x(x-1)\,f''(x) + (1+\alpha x)\,f'(x) \ ; \ \alpha \text{ est un réel donné différent de } 0 \ .$$

III.1. Noyau de V_α :

a) Résoudre l'équation différentielle : (1) $\quad x(x-1)\,u'(x) + (1+\alpha x)\,u(x) = 0$

où u est une fonction réelle, continûment dérivable, définie sur $]0, 1[$.

b) Déterminer les fonctions h de E telles que $V_\alpha(h) = 0$.

c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel de ces fonctions ?
A quelle condition sur α, les fonctions obtenues sont-elles des polynômes ?

III.2. Résolution d'une équation différentielle associée à V_α :

Soit λ_k $(\neq 0)$ une valeur propre de l'application T_α définie dans $\mathbb{R}_n[X]$ et P un polynôme, vecteur propre associé.

Pour résoudre l'équation $V_\alpha(f) = \lambda_k f$, on pose $f = P.g$ où g est une fonction inconnue de E .

a) Démontrer que la fonction $x \mapsto P(x)^2 \cdot g'(x)$ vérifie l'équation différentielle (1).

En déduire cette fonction $P^2 \cdot g'$.

b) On suppose $\alpha > 0$ et la valeur propre λ_k égale à α .

Donner l'expression du polynôme P .

Résoudre l'équation $V_\alpha(f) = \alpha f$ pour $\alpha = 2$.

Préciser la dimension du sous-espace vectoriel des fonctions obtenues.

FIN DU PROBLEME